

11.11.

Vyšetření průběhu fce - Příklad

$$\boxed{1} \quad f(x) = x^3 - 3x + 2$$

① $D_f = \mathbb{R}$, není omezená ani lichá (ale $x^3 - 3x$ je lichá)

② přivést k osami

$$P_y = [0, 2]$$

P_x : hledáme nulové body fce

vhodneme kořen $x_1 = 1$

$$\text{dělíme } (x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x + 2 \\ -(x^2 - x) \\ \hline -2x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x + 2 \\ -(-2x + 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\text{dále } x^2 + x - 2 = (x - 1) \cdot (x + 2)$$

$$\Rightarrow \text{kořeny } f: x_1 = x_2 = 1, x_3 = -2$$

$$\Rightarrow P_x: [1, 0], [-2, 0]$$

$$\text{vidíme } f(x) = \underbrace{(x - 1)^2} \cdot (x + 2)$$

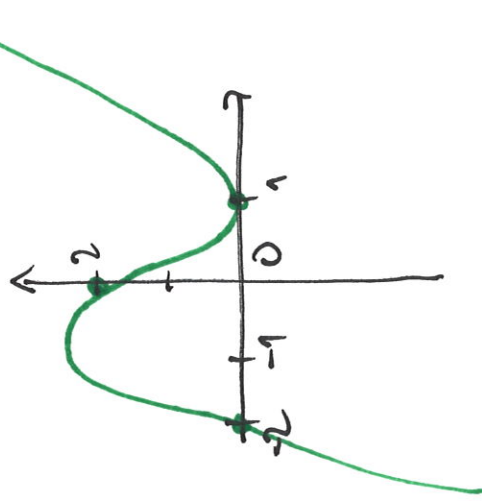
$$\text{a proto } f(x) \geq 0 \text{ pro } x \geq -2$$

$$\leq 0 \text{ pro } x \leq -2$$

③ limity v krajních bodech D_f :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 3x + 2) = \pm\infty$$

④ předběžný graf:



5) derivace:

$$f'(x) = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3$$

pro $\forall x \in \mathbb{R}$

6) vyjimečné body $\forall f$:

a) stacionární body: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3 \quad |:3$$

$$x^2 = 1$$

$$|x = \pm 1| \text{ stac. body}$$

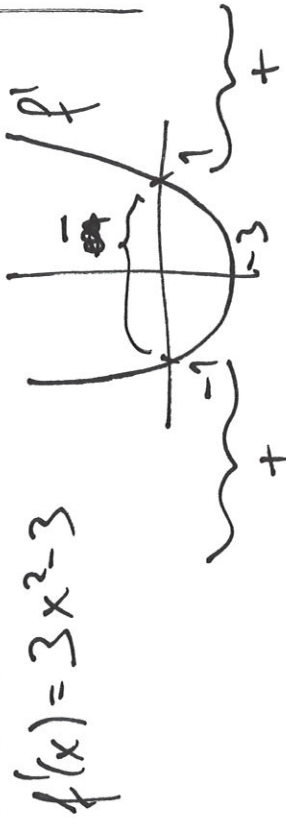
b) body bez derivace ... nejst.

c) krajní body $D_f: \pm\infty$

$$\Rightarrow V_f = \{-\infty, -1, +1, +\infty\}$$

7) monotonie + extrém:

pomocí znaménkové derivace:



a tedy $f'(x) < 0$ v $(-1, 1) \Rightarrow f$ klesá v $(-1, 1)$
 $f'(x) > 0$ v $(-\infty, -1)$ a v $(1, +\infty)$
 $\Rightarrow f$ roste v $(-\infty, -1)$ a v $(1, +\infty)$

$\Rightarrow$ lok. max. je v bodě -1

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = 4$$

lok. min. je v bodě 1

$$f(1) = 0$$

glob. extrém nejst., protože
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

a také $H_f = \mathbb{R}$

8) asymptoty
a) žádné - nejst. ($D_f = \mathbb{R}$)

b) asympt. v $\pm\infty$:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x} = +\infty$$

asympt. nejst.

$$9) f''(x) = (3x^2 - 3)' = 6x$$

$$2. \quad 6x = 0$$

$[x=0]$... kandidát
na inf. bod

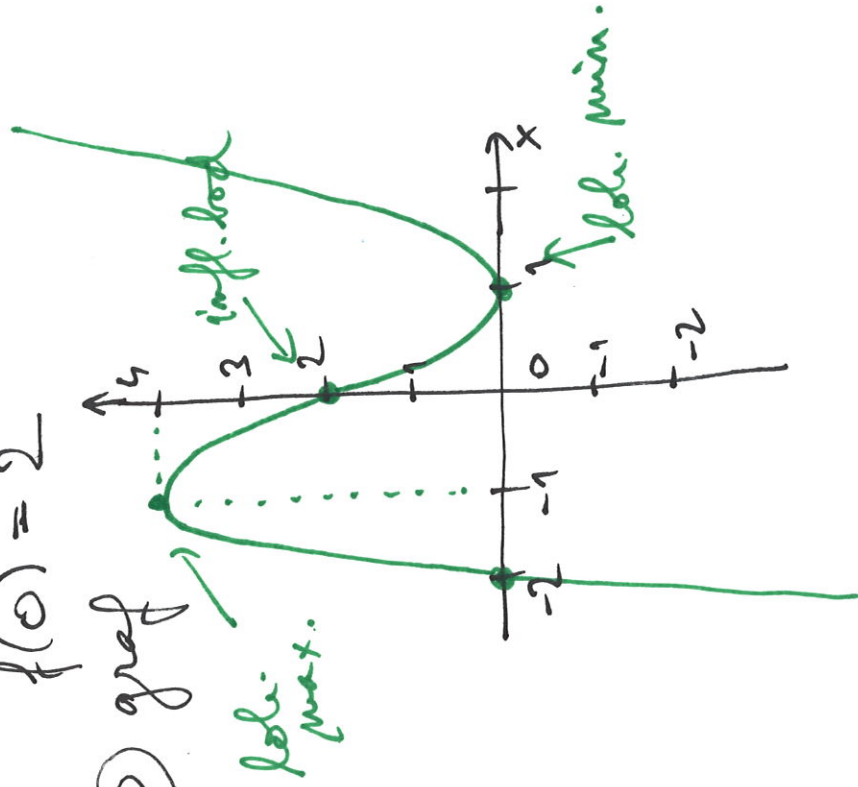
$$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ konk. } \cap$$

$$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ konv. } \cup$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ je inflexní bod}$$

$$f(0) = 2$$

10) graf



$$[2] \quad f(x) = \frac{2x^2 + x + 5}{x - 1}$$

$$1) D_f = \mathbb{R} - \{1\}, \text{ není žádná ani žádná}$$

2) přímky s osami:

$$P_y: f(0) = \frac{5}{-1} = -5, \quad P_y = [0, -5]$$

$$P_x: f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + x + 5 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -39 < 0$$

tedy nejsou reálné kořeny,
f nemá žádné P_x

manipulo se f?

$$\text{dřítel } 2x^2 + x + 5 > 0 \quad \forall \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ ne manipulujeme f, má vždy

jeu jmenovatel:

$$x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$x < 1 \Rightarrow x - 1 < 0 \Rightarrow f(x) < 0$$

(Samy: dostat se do f nějaké cíle.)

③ limity:

$$D_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+5}{x-1} \stackrel{(F.1)}{=} +\infty$$

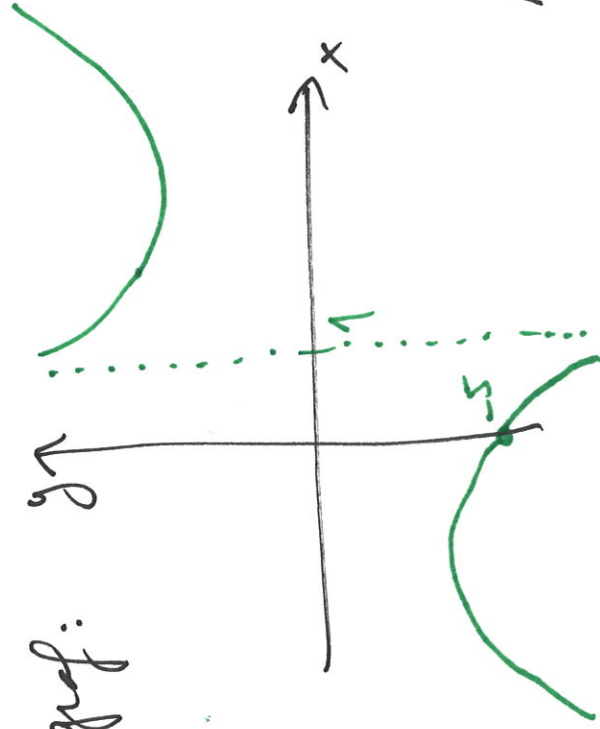
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+x+5}{x-1} \stackrel{(F.1)}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x \left(1 - \frac{1}{x}\right)} \stackrel{x^2}{\rightarrow} \frac{2}{1} = 2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot 2 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2+x+5}{x-1} = \frac{8}{0+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2x^2+x+5}{x-1} = \frac{8}{0-} = -\infty$$

④ předb. graf: $y \uparrow$



$$\textcircled{5} f'(x) = \left(\frac{2x^2+x+5}{x-1} \right)' =$$

$$= \frac{(4x+1) \cdot (x-1) - (2x^2+x+5) \cdot 1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{4x^2+x-4x-1-2x^2-x-5}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-4x-6}{(x-1)^2} = 2 \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

pro $\forall x \in D_f$

⑥ vyjimečné body:

a) stacion. body: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \dots \text{stac. body: } -1; 3$$

b) body bez derivace ... nejsem

c) krajní body D_f : $\{-\infty, 1-, 1+, +\infty\}$

$$\Rightarrow V_f = \{-\infty, -1, 1-, 1+, 3, +\infty\}$$

7 monotonic + extremy:

porovnání hodnot / limit

$x \in V_f$	$-\infty$	-1	1	$1 + 3$	$+\infty$
$f(x)$ nebo $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$	$-\infty$	-3	$-\infty$	$+\infty$	13

Spektrum:

$$f(-1) = \frac{2-1+5}{-1-1} = \frac{6}{-2} = -3$$

$$f(3) = \frac{2 \cdot 9 + 3 + 5}{3-1} = \frac{26}{2} = 13$$

$\Rightarrow$ lok. max. $[-1, -3]$

lok. min. $[3, 13]$

glob. extremy nejten (limity $\pm\infty$)

$$H_f = (-\infty, -3) \cup (13, +\infty)$$

8 asymptoty:

a) máme dvě asymptoty

$$\boxed{x=1} \quad \text{protože} \quad \lim_{x \rightarrow 1 \pm} f(x) = \pm\infty$$

b) $x \rightarrow \pm\infty$:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x + 5}{x(x-1)} = \underline{\underline{2=k}}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - k \cdot x) =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 + x + 5}{x-1} - 2x \right) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x + 5 - 2x(x-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x + 5 - 2x^2 + 2x}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x + 5}{x-1} = \underline{\underline{3=q}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ asymptota $x \rightarrow \pm\infty$ je $\boxed{y=2x+3}$

$$\begin{aligned}
 9) f''(x) &= \left(2 \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} \right)' = \\
 &= 2 \cdot \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2 - 2x - 3) \cdot 2 \cdot (x-1)}{(x-1)^4} = \\
 &\quad \left[\text{spółczynn. } (x-1)^2 \right]' = 2 \cdot (x-1) \quad \uparrow \\
 &= 2 \cdot \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x - 3) \cdot 2}{(x-1)^3} = \\
 &\quad \left[\begin{array}{l} \text{brakujące} \\ (x-1)! \end{array} \right] = 2 \cdot \frac{\cancel{2x^2} - \cancel{2x} - 2x + 2 - 2x^2 + 4x + 6}{(x-1)^3} = \\
 &= 2 \cdot \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{16}{(x-1)^3} \quad \text{Kdy? } 0 \\
 &\quad \text{Nigdy!}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ zawsze ściągając inf. lub

a widome

$$x > 1 \Rightarrow (x-1)^3 > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f \text{ konv.}$$

$$x < 1 \Rightarrow (x-1)^3 < 1 \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ konk.}$$

10) graf

